

Πρόοδος
22/11/2024

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

1. Κατασκευάστε τις δυο πρώτες διαδοχικές προσεγγίσεις της λύσης του προβλήματος *Cauchy* παίρνοντας ως μηδενική προσέγγιση το διάνυσμα των αρχικών συνθηκών.

$$\begin{cases} x' = \sin(xy) + 2t, & x(0) = 1, \\ y' = x + y - 1, & y(0) = 0. \end{cases}$$

2. Γράψτε το ακόλουθο πρόβλημα *Cauchy*

$$\begin{aligned} y''' - a(t)(y'')^2 + b(t)y' + |y|^\alpha &= f(t), \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) &= 0, \end{aligned}$$

ως πρόβλημα *Cauchy* για ένα σύστημα εξισώσεων 1-ης τάξης. Εδώ $\alpha \geq 0$ - σταθερά.

Κάτω από ποιες συνθήκες σύμφωνα με το θεώρημα *Picard* αυτό το πρόβλημα έχει μια μοναδική λύση.

3. Αποδείξτε ότι το πρόβλημα

$$y' = 1 - 2\operatorname{sign} y, \quad y(0) = 0$$

δεν έχει λύση στο $x \in (0, +\infty)$.

4. Έστω $y(x)$ λύση του προβλήματος *Cauchy*

$$y' = e^y + \cos(x^2 + y^2) + 1, \quad y(0) = 1.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x^*} y(x) = +\infty$$

για κάποιο $x^* \in (0, 1/e)$.

Διάρκεια της εξέτασης 100 λεπτά